Сборная Тейлора и Маклорена

Ранее мы рассматривали универсальную функцию mat имеющую следующий степенной ряд

$$mat_{m,t,s}(x) = 1 + x + \frac{(-m+t+2s)x^2}{2} + \frac{(-m+t+3s)(-2m+t+3s)x^3}{3!} + \frac{(-m+t+4s)(-2m+t+4s)(-3m+t+4s)x^4}{4!} + \frac{(-m+t+5s)(-2m+t+5s)(-3m+t+5s)(-4m+t+5s)x^5}{5!} + \cdots$$

Сегодня в нашем распоряжении больше статистики её применений. Исходя из этой статистики, правильнее будет ввести другую функцию, с более закономерной логикой, mts.

$$mts_{m,t,s}(x) = t + x + \frac{(-m+t+2s)x^2}{2} + \frac{(-m+t+3s)(-2m+t+3s)x^3}{3!} + \frac{(-m+t+4s)(-2m+t+4s)(-3m+t+4s)x^4}{4!} + \frac{(-m+t+5s)(-2m+t+5s)(-3m+t+5s)(-4m+t+5s)x^5}{5!} + \cdots$$

000. Если все базовые параметры равны нулю, сборная даёт сама себя. $mts_{0,0,0}(x) = x$.

Если, хотя бы один из базовых параметров не равен нулю, mts даёт степенные ряды основных функций, имеющие общие свойства.

1. Если головной параметр t равен нулю, параметрические тождества образуются с коэффициентами пропорциональности функций. Если головной параметр t равен единице, параметрические тождества образуются со степенями над функциями.
2. Если правый параметр s равен нулю, и левый параметр m неравен нулю, функции раскладываются в ряд Тейлора, и рабочий параметр исходной выглядит так 1+x. Если правый параметр s неравен нулю, функции раскладываются в ряд Маклорена, и рабочий параметр в сборную подаётся с противоположным знаком, относительно исходной.

m00. Если только левый базовый параметр m неравен нулю, а остальные базовые параметры равны нулю, то получим степенной ряд логарифма.

$$\ln(1+x) = mts_{1,0,0}(x) = x + \frac{(-1)x^2}{2} + \frac{(-1)(-2)x^3}{3!} + \frac{(-1)(-2)(-3)x^4}{4!} + \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)x^5}{5!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = mts_{1,0,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$c * \ln(1+x) = c * mts_{1,0,0}(x) = mts_{1/c,0,0}(cx)$$

m0s. Если и левый параметр m неравен нулю, и правый параметр s неравен нулю, получается тоже логарифм. Существует гипотеза, что если эти два параметра не будут равны друг другу, возможно, получится расширенная функция логарифма.

$$\ln(1+x) = -mts_{1,0,1}(-x) = -\left(-x + \frac{(-1+2)x^2}{2} - \frac{(-1+3)(-2+3)x^3}{3!} + \frac{(-1+4)(-2+4)(-3+4)x^4}{4!} - \frac{(-1+5)(-2+5)(-3+5)(-4+5)x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$mts_{1,0,1}(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Из логарифма можно получить тригонометрический арктангенс, так же, как тригонометрический синус из экспоненты. Параметрические тождества даже расширенного логарифма в любом случае такие же, как у всех функций данного класса, при t=0.

$$c * mts_{m,0,s}(x) = mts_{m/c,0,s/c}(cx)$$

00s. Если левый параметр m равен нулю, а правый параметр s неравен нулю, то получается функция Ламберта.

$$-mts_{0,0,s}(-x) = -\left(-x + \frac{(2s)x^2}{2} - \frac{(3s)(3s)x^3}{3!} + \frac{(4s)(4s)(4s)x^4}{4!} - \frac{(5s)(5s)(5s)(5s)x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$lam(x) = -mts_{(0,0,1)}(-x)$$

Итого: мы рассмотрели все функции, когда головной параметр t равен 0. Посмотрим, какие функции получаются, когда головной базовый параметр t равен 1.

Здесь левый параметр, не только 0 или 1, соответственно, появляется ещё одно свойство. Если параметр m неравен нулю, то рабочий параметр сборной всегда делится на m.

010. Если и левый и правый базовые параметры равны нулю, получается степенной ряд экспоненты.

$$mts_{0,1,0}(x) = 1 + x + \frac{(1)x^2}{2} + \frac{(1)(1)x^3}{3!} + \frac{(1)(1)(1)x^4}{4!} + \frac{(1)(1)(1)(1)x^5}{5!} + \cdots$$

Её чётные члены используют функции cos и cosh, нечётные – sin и sinh. На калькуляторе набора Галактика-Платон, в функцию mat, после базовых параметров, в основании, можно вводить параметры цикла h. По умолчанию, от=0, шаг=1, до=гугол.

$$(e^x)^c = \left(mat_{0,1,0}x\right)^c = mat_{0,1,0}(cx)$$

m10. Если левый параметр m неравен нулю, а параметр синхронизации s равен нулю, получается обычный радикал. Из него можно получать биноминальное разложение и геометрический ряд.

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/m} &= mts_{m,1,0}(x/m)\\ &= 1 + \frac{x}{m} + \frac{(1-m)\left(\frac{x}{m}\right)^2}{2} + \frac{(1-m)(1-2m)\left(\frac{x}{m}\right)^3}{3!} + \frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)\left(\frac{x}{m}\right)^4}{4!}\\ &+ \frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)(1-4m)\left(\frac{x}{m}\right)^5}{5!} + \cdots\end{aligned}$$

$$\left(mat_{m,1,0}\left(\frac{x}{m}\right)\right)^c = mat_{m/c,1,0}\left(\frac{cx}{m}\right)$$

m1s. Если все базовые параметры не равны нулю, объединённая функция даёт ультрарадикал

$$\begin{aligned}mts_{m,1,s}(x) &= 1 + x + \frac{(-m+1+2s)x^2}{2} + \frac{(-m+1+3s)(-2m+1+3s)x^3}{3!}\\ &+ \frac{(-m+1+4s)(-2m+1+4s)(-3m+1+4s)x^4}{4!}\\ &+ \frac{(-m+1+5s)(-2m+1+5s)(-3m+1+5s)(-4m+1+5s)x^5}{5!} + \cdots\end{aligned}$$

С его помощью трёхчлен с любыми степенями решается фантастически миниатюрной формулой. Четырёхчлен решается фокс-умножением двух ультрарадикалов. Пятичлен решается фокс-умножением трёх ультрарадикалов, и т.д. Возьмём трёхчлен

$$Fx^f + Gx^g + Hx^h = 0$$
$$|f| > |g| > |h|$$

Чтобы найти x, нужно выбрать два члена – голову и хвост. Остальные члены будем называть частями туловища. Разница степеней головы и хвоста, это величина ‘B’, левый базовый параметр. Если голова, это первый член, а хвост – последний, то одной такой формулой можно получить все ‘B’ корней каждой ветки. Если все степени вещественные и целые, то ветка всего одна.

Если нужно не просто найти все корни уравнения, а ещё и показать, как они упорядочены, на комплексной плоскости, то используется предварительное сравнение коэффициентов и степеней членов. После чего можно узнать, какой голове, и какому хвосту принадлежат соответствующие корни, и как они упорядочены возле радикальной окружности, которую формируют эти два члена – голова и хвост. $D = \frac{|F|^{|g-h|} * |H|^{|f-g|}}{|G|^{|f-h|}}$, $T = \frac{|g-h|^{|g-h|} * |f-g|^{|f-g|}}{|f-h|^{|f-h|}}$

<table>
<tr><td>$B = f - h$</td><td>$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{H}{F}\right)}{f-h}}$</td><td>$N = g - h$</td><td>$R = \frac{-G}{Fv^{f-g}}$</td><td>Blue</td><td>$D > T$</td></tr>
<tr><td>$B = f - g$</td><td>$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{G}{F}\right)}{f-g}}$</td><td>$N = h - g$</td><td>$R = \frac{-H}{Fv^{f-h}}$</td><td>Red</td><td rowspan="2">$D \le T$</td></tr>
<tr><td>$B = g - h$</td><td>$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{H}{G}\right)}{g-h}}$</td><td>$N = f - h$</td><td>$R = \frac{-F}{Gv^{g-f}}$</td><td>Navy</td></tr>
</table>

$$x = v * brn_{B,N}(R)$$
$$brn_{m,s}(x) = mat_{m,1,s}\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$\left(brn_{m,s}(x)\right)^c = brn_{m/c,s/c}(x) = mat_{m/c,1,s/c}\left(\frac{cx}{m}\right)$$

У трёхчлена корни могут располагаться либо возле одной радикальной окружности, либо возле двух.
Во всех случаях используется логика параметров m,1,s. Но сами параметры, для каждой окружности свои.
Когда D=1, радиусы обеих парных радикальных окружностей равны. При дальнейшем увеличении D, когда модуль коэффициента среднего члена уменьшается, или увеличиваются модули коэффициентов крайних членов, корни трёхчлена приближаются к корням двучлена, образованного крайними членами. То есть к одиночной радикальной окружности. В наборе Галактика-Платон в меню примеры, есть анимации ультрарадикальных законов.

У четырёхчлена, также два члена используются в качестве головы и хвоста. Каждый из оставшихся членов используется в качестве туловища для двух разных ультрарадикалов. Чтобы получить корни, используется операция не обычное умножение, а фокс-умножение двух ультрарадикалов.

$$Dx^d + Fx^f + Gx^g + Hx^h = 0$$

Если взять первый и последний члены, в качестве головы и хвоста, то средние члены используются для получения двух ультрарадикалов от двух трёхчленов $Dx^d + Fx^f + Hx^h$ и $Dx^d + Gx^g + Hx^h$. v - в обоих случаях одинакова, так как голова и хвост общие.

$$x = v * \left(brn_{B,N_1} R_1 [*] brn_{B,N_2} R_2\right)$$

При фокс-умножении фокс-умножается каждый член одного ряда на каждый член другого ряда. Получается сумма таких фокс-произведений членов. В калькуляторе набора Галактика-Платон, фокс-умножение реализовано на универсальной функции.

$$x = v * \left(brn_{m,s_1} R_1 [*] brn_{m,s_2} R_2\right) = v * mat_{m,1,s_1,s_2}\left(\frac{R_1}{m}, \frac{R_2}{m}\right)$$

Чтобы решить уравнение $3x^{12} + 2x^7 + 4x^3 - 20 = 0$, можно заложить в числовую память этого калькулятора следующую программу

$$v = e^{\frac{Ln\left(\frac{20}{3}\right)}{m}}, \qquad m = 12$$

$$s_1 = 7, \qquad R_1 = \frac{-2}{3v^5}$$

$$s_2 = 3, \qquad R_2 = \frac{-4}{3v^9}$$

$$x = v * mat_{m,1,s_1,s_2}\left(\frac{R_1}{m}, \frac{R_2}{m}\right)$$

Затем ввести в индикатор калькулятора ‘x’, и нажать ‘=’. Если в меню strucMath-Ln выбрано главное значение логарифма (0), то калькулятор даст такой корень 1.1092321891982008957
Можно сделать проверку, вставить в индикатор калькулятора $3x^{12} + 2x^7 + 4x^3$ и нажать ‘=’
Давным-давно, различные частные случаи ультрарадикала находили Бринг, Жеррар, ещё в более общей форме Ламберт и Эйлер. Но их именами уже названы другие функции, поэтому абсолютный ультрарадикал назван именем Бринга.
01s. Если левый базовый параметр m=0, но правый базовый параметр $s \neq 0$, универсальная функция даёт расширенную функцию Ламберта.

$$x = y * mat_{0,1,s}(-zy^s) = y\left(1 + (-zy^s) + \frac{(1+2s)(-zy^s)^2}{2} + \frac{(1+3s)^2(-zy^s)^3}{3!} + \frac{(1+4s)^3(-zy^s)^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$\left(mat_{0,1,s}(-zy^s)\right)^c = mat_{0,1,s/c}(-czy^s)$$

По определению $y = x * e^{zx^s}$
Когда z, s, y - известны, и нужно найти x, используется расширенная функция Ламберта. Её степенной ряд можно выразить через универсальную функцию

$$x = y * mat_{0,1,s}(-zy^s)$$

Если экспоненту выразить также через универсальную функцию, то обе формулы выглядят одинаково

$$y = x * mat_{0,1,0}(zx^s)$$

С помощью фокс умножения можно решить логарифмический многочлен

$$y = x * e^{z_1 x^{s_1} + z_2 x^{s_2}}$$
$$x = y * mat_{0,1,s_1,s_2}(-z_1 y^{s_1}, -z_2 y^{s_2})$$

Понять, чем отличается фокс-умножение, от обычного умножения несложно. Когда два члена разных рядов фокс-умножаются, они представляют следующее фокс-произведение

$$\frac{\prod_{a_1=1}^{h_1-1}(-ma_1 + t + h_1 s_1)\, x_1^{h_1}}{h_1!} [*] \frac{\prod_{a_2=1}^{h_2-1}(-ma_2 + t + h_2 s_2)\, x_2^{h_2}}{h_2!} = \prod_{a=1}^{h_1+h_2-1} (-ma + t + h_1 s_1 + h_2 s_2) \frac{x_1^{h_1} x_2^{h_2}}{h_1!\, h_2!}$$

Каждый множитель – это член соответствующего ряда: 1, x …

$$mat_{m,t,s} x = 1 + x + \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{x^h}{h!} \prod_{a=1}^{h-1} (-ma + t + hs) \right)$$
$$= 1 + x + \frac{(-m + t + 2s)x^2}{2} + \frac{(-m + t + 3s)(-2m + t + 3s)x^3}{3!}$$
$$+ \frac{(-m + t + 4s)(-2m + t + 4s)(-3m + t + 4s)x^4}{4!}$$
$$+ \frac{(-m + t + 5s)(-2m + t + 5s)(-3m + t + 5s)(-4m + t + 5s)x^5}{5!} + \cdots$$

В 2005 году группа физиков, занимающихся изучением свойств плазмы А.Е. Дубинов и И.Д. Дубинова, вывели формулу для получения значений абсолютной функции Ламберта через композицию операций над простой функцией Ламберта. Первое практическое применение можно посмотреть в статье «Точное решение дисперсионного уравнения Ландау для колебаний электронной плазмы». Она находится в свободном доступе https://journals.ioffe.ru/articles/11625 Здесь мы покажем только математическую суть

$$y = xe^{zx^s}$$
$$x = y * lmb_s(-zy^s)$$

Если привести исходное уравнение к виду $z = 1/s$, то $x = y * e^{-z*lam(y^s)}$

Проверим на частном случае, по степенному ряду. z=.5, y=.1, s=2.

$$lmb_2(-.5 * .1^2) = 1 + (-.5 * .1^2) + \frac{(1+4)(-.5 * .1^2)^2}{2} + \frac{(1+6)^2(-.5 * .1^2)^3}{3!} + \cdots = .99506149777765$$
$$e^{-3*lam(.1^2)} .99506149777765$$

Чтобы не заморачиваться с предварительными преобразованиями, конечно удобнее пользоваться абсолютной функцией Ламберта lmb. Вероятно, авторам будет приятно узнать, что найденная ими функция – это не их прихоть физиков ради удобства, а реально основная функция, которая имеет свой собственный степенной ряд сборной функции Тейлора и Маклорена. Точно такая же самостоятельная личность, как и все остальные игроки этой сборной – логарифм, экспонента, радикал и пр.

Большинство функций развивались тысячелетиями. Каждые столетия математики находили новые свойства и тождества. В 1758 году Ламберт получил степенной ряд частного случая ультрарадикала для уравнения $x^m + px = q$. Но и этого Эйлеру оказалось достаточно, и даже более того, в своих трудах, он называл Ламберта величайшим гением. Вероятно, поэтому эту функцию Эйлера решили называть функцией Ламберта. И поэтому теперь функцию Ламберта приходится называть функцией Бринга.

Изучать свойства ультрарадикала сложнее всех остальных вместе взятых, ведь у него ни один параметр не равен нулю. Но если все эти функции имеют общую систему, то вероятно и их свойства также систематизированы. Фокс-умножение, даже простых функций Ламберта, тоже дело не простое. Кому-то понятнее исследовать их графически, кому-то алгоритмически. Ни тех, ни других инструментов пока толком не развито. Знал бы Ламберт, какой бардак будет в науке через 250 лет, наверное, занялся бы политикой.

vvvv#VII*

http://glax-plato.ru/

https://www.cyberforum.ru/blogs/784248/

Gruzdov A.V.
Berezin S.V.
Berezin A.V.
Berezin P.V.
Ufa, Russia.
2023.08.09

*То были краткие итоги вахтенного журнала седьмой экспедиции на полиномы.