Расширенная функция Ламберта и другие дети универсальной функции

Благодаря универсальной функции, удалось, относительно легко разложить в степенной ряд расширенную функцию Ламберта. Так что если встретите неберущийся интеграл, который приводит к этому степенному ряду, поменяйте его пометку на "теперь уже берущийся интеграл".

По определению $y = x * e^{zx^s}$

Когда z, s, y - известны, и нужно найти x, используется расширенная функция Ламберта. Её степенной ряд можно выразить через универсальную функцию

$$x = y * mat_{0,1,s}(-zy^s)$$

Если экспоненту выразить также через универсальную функцию, то обе формулы выглядят одинаково

$$y = x * mat_{0,1,0}(zx^s)$$

Универсальная функция имеет 3 базовых параметра, которые превращают её в определённую функцию или операцию, и один рабочий параметр над которыми работают эти определённые функции и операции.

$$\begin{aligned} mat_{m,t,s}x = \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{x^h}{h!}\prod_{a=1}^{h-1}(-ma+t+hs)\right) \\ = 1 + x + \frac{(-m+t+2s)x^2}{2} + \frac{(-m+t+3s)(-2m+t+3s)x^3}{3!} \\ + \frac{(-m+t+4s)(-2m+t+4s)(-3m+t+4s)x^4}{4!} \\ + \frac{(-m+t+5s)(-2m+t+5s)(-3m+t+5s)(-4m+t+5s)x^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

Таким образом

$$x = y * mat_{0,1,s}(-zy^s) = y\left(1 + (-zy^s) + \frac{(1+2s)(-zy^s)^2}{2} + \frac{(1+3s)^2(-zy^s)^3}{3!} + \frac{(1+4s)^3(-zy^s)^4}{4!} + \cdots\right)$$

Например

$$.1 = x * e^{3x^2}$$

$$x = .1 * mat_{0,1,2}(-3 * .1^2) = .1\left(1 + (-.03) + \frac{5(-.03)^2}{2} + \frac{7^2(-.03)^3}{3!} + \frac{9^3(-.03)^4}{4!} + \cdots\right) = .097205\ldots$$

Этот пример можно решить другими аналитическими методами. В том числе данная задача может быть решена несложной композиции простой функции Ламберта и простых операций над ней и её параметром, значит, при желании можно вывести некоторые полезные тождества степенных рядов и операций над ними.

Наша задача узнать все полномочия универсальной функции. И получается, что теперь нам известны все функции, которые даёт универсальная функция, когда её головной базовый параметр t=1. Их можно разделить на 4 группы.

1. Если и левый базовый параметр m=0, и правый базовый параметр s=0, универсальная функция даёт экспоненту

$$e^x = mat_{0,1,0}x = \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{x^h}{h!}\prod_{a=1}^{h-1}(-0*a+t+h*0)\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$(e^x)^c = \left(mat_{0,1,0}x\right)^c = mat_{0,1,0}(cx)$$

Её чётные члены используют функции cos и cosh, нечётные – sin и sinh. На калькуляторе набора Галактика-Платон, в функцию mat, после базовых параметров, в основании, можно вводить параметры цикла h. По умолчанию, от=0, шаг=1, до=гугол.

2. Если левый базовый параметр m=0, но правый базовый параметр $s \neq 0$, универсальная функция даёт расширенную функцию Ламберта.

$$x = y * mat_{0,1,s}(-zy^s) = y\left(1 + (-zy^s) + \frac{(1+2s)(-zy^s)^2}{2} + \frac{(1+3s)^2(-zy^s)^3}{3!} + \frac{(1+4s)^3(-zy^s)^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$\left(mat_{0,1,s}(-zy^s)\right)^c = mat_{0,1,s/c}(-czy^s)$$

3. Если левый базовый параметр $m \neq 0$, а правый базовый параметр s=0, универсальная функция даёт обычный радикал. Его же можно использовать и для биноминального разложения, и для геометрического ряда. Во всех этих случаях, радиус сходимости зависит только от x

$$y^m = 1 + x$$

$$y = (1+x)^{\frac{1}{m}} = mat_{m,1,0}\left(\frac{x}{m}\right) = 1 + \frac{x}{m} + \frac{\left(\frac{x}{m}\right)^2 (1-m)}{2} + \frac{\left(\frac{x}{m}\right)^3 (1-m)(1-2m)}{3!} + \cdots$$

$$\left(mat_{m,1,0}\left(\frac{x}{m}\right)\right)^c = mat_{m/c,1,0}\left(\frac{cx}{m}\right)$$

4. Если все базовые параметры не равны нулю, универсальная функция даёт ультрарадикал. С его помощью трёхчлен с любыми степенями решается фантастически миниатюрной формулой. Четырёхчлен решается фокс-умножением двух ультрарадикалов. Пятичлен решается фокс-умножением трёх ультрарадикалов, и т.д.

Возьмём трёхчлен

$$Fx^f + Gx^g + Hx^h = 0$$
$$|f| > |g| > |h|$$

Пока это единственное аналитическое решение, когда f-h>4, и когда степени комплексные. Это может пригодиться не только для взятия неберущихся интегралов, но и для анализа.

Чтобы найти x, нужно выбрать два члена – голову и хвост. Остальные члены будем называть частями туловища. Разница степеней головы и хвоста, это величина ‘B’. Если голова, это первый член, а хвост – последний, то одной такой формулой можно получить все ‘B’ корней одной ветки. Если все степени вещественные и целые, то ветка всего одна.

Если нужно не просто найти все корни уравнения, а ещё и показать, как они упорядочены, на комплексной плоскости, то используется предварительное сравнение коэффициентов и степеней членов. После чего можно узнать, какой голове, и какому хвосту принадлежат соответствующие корни, и как они упорядочены возле радикальной окружности, которую формируют два члена – голова и хвост. $D = \frac{|F|^{|g-h|} * |H|^{|f-g|}}{|G|^{|f-h|}}$, $T = \frac{|g-h|^{|g-h|} * |f-g|^{|f-g|}}{|f-h|^{|f-h|}}$

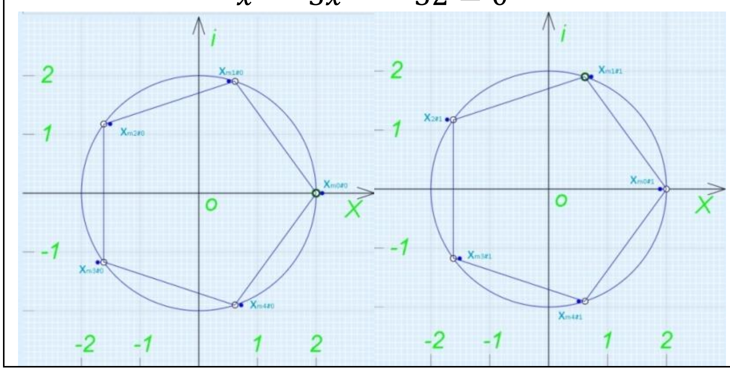
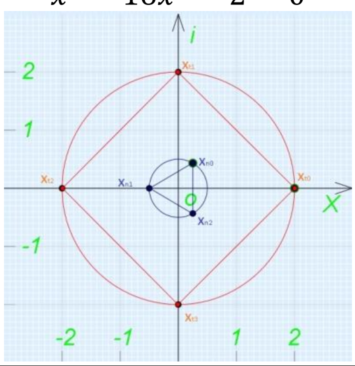
$B = f - h$	$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{H}{F}\right)}{f-h}}$	$N = g - h$	$R = \frac{-G}{Fv^{f-g}}$	Blue	$D > T$
$B = f - g$	$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{G}{F}\right)}{f-g}}$	$N = h - g$	$R = \frac{-H}{Fv^{f-h}}$	Red	$D \leq T$
$B = g - h$	$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{H}{G}\right)}{g-h}}$	$N = f - h$	$R = \frac{-F}{Gv^{g-f}}$	Navy	

$$x = v * brn_{B,N}(R)$$

$$brn_{m,s}(x) = mat_{m,1,s}\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$\left(brn_{m,s}(x)\right)^c = brn_{m/c,s/c}(x) = mat_{m/c,1,s/c}\left(\frac{cx}{m}\right)$$

У трёхчлена корни могут располагаться либо возле одной радикальной окружности, либо возле двух.

$x^5 - 3x^{1.5} - 32 = 0$	$x^7 - 16x^3 - 2 = 0$
	

Когда D=1, радиусы обеих радикальных окружностей равны. При дальнейшем увеличении D, когда модуль коэффициента среднего члена уменьшается, или увеличиваются модули коэффициентов крайних членов, корни трёхчлена приближаются к корням двучлена, образованного крайними членами.

У четырёхчлена, также два члена используются в качестве головы и хвоста. Каждый из оставшихся членов используются в качестве туловища для двух разных ультарадикалов. Чтобы получить корни, используется операция не обычное умножение, а фокс-умножение двух ультрарадикалов.

$$Dx^d + Fx^f + Gx^g + Hx^h = 0$$

Если взять первый и последний члены, в качестве головы и хвоста, то средние члены используются для получения двух ультрарадикалов от трёхчленов $Dx^d + Fx^f + Hx^h$ и $Dx^d + Gx^g + Hx^h$.

$$x = v * \left(brn_{B,N_1} R_1 [*] brn_{B,N_2} R_2\right)$$

При фокс-умножении фокс-умножается каждый член одного ряда на каждый член другого ряда. Получается сумма таких фокс-произведений членов.

$$x = 1 + S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots$$

$$S_0 = \frac{R_0}{B} + \frac{\left((1 - B + 2N_0)R_0^2\right)}{2B^2} + \frac{(1 - B + 3N_0)(1 - 2B + 3N_0)R_0^3}{3!\,B^3} + \frac{(1 - B + 4N_0)(1 - 2B + 4N_0)(1 - 3B + 4N_0)R_0^4}{4!\,B^4} + \cdots$$

$$S_1 = \frac{R_1}{B} + \frac{(1 - B + 2N_1)R_1^2}{2B^2} + \frac{(1 - B + 3N_1)(1 - 2B + 3N_1)R_1^3}{3!\,B^3} + \frac{(1 - B + 4N_1)(1 - 2B + 4N_1)(1 - 3B + 4N_1)R_1^4}{4!\,B^4} + \cdots$$

$$S_2 = (1 - B + N_0 + N_1)\frac{R_0}{B}\frac{R_1}{B} + (1 - B + 2N_0 + N_1)(1 - 2B + 2N_0 + N_1)\frac{R_0^2}{2B^2}\frac{R_1}{B} + (1 - B + 3N_0 + N_1)(1 - 2B + 3N_0 + N_1)(1 - 3B + 3N_0 + N_1)\frac{R_0^3}{3!\,B^3}\frac{R_1}{B} + \cdots$$

$$S_3 = (1 - B + N_0 + 2N_1)(1 - 2B + N_0 + 2N_1)\frac{R_0}{B}\frac{R_1^2}{2B^2} + (1 - B + 2N_0 + 2N_1)(1 - 2B + 2N_0 + 2N_1)(1 - 2B + 2N_0 + 2N_1)\frac{R_0^2}{2B^2}\frac{R_1^2}{2B^2} + (1 - B + 3N_0 + 2N_1)(1 - 2B + 3N_0 + 2N_1)(1 - 3B + 3N_0 + 2N_1)(1 - 4B + 3N_0 + 2N_1)\frac{R_0^3}{3!\,B^3}\frac{R_1^2}{2B^2} + \cdots$$

$$S_4 = (1 - B + N_0 + 3N_1)(1 - 2B + N_0 + 3N_1)(1 - 3B + N_0 + 3N_1)\frac{R_0}{B}\frac{R_1^3}{3!\,B^3} + (1 - B + 2N_0 + 3N_1)(1 - 2B + 2N_0 + 3N_1)(1 - 3B + 2N_0 + 3N_1)(1 - 4B + 2N_0 + 3N_1)\frac{R_0^2}{2B^2}\frac{R_1^3}{3!\,B^3} + (1 - B + 3N_0 + 3N_1)(1 - 2B + 3N_0 + 3N_1)(1 - 3B + 3N_0 + 3N_1)(1 - 4B + 3N_0 + 3N_1)(1 - 5B + 3N_0 + 3N_1)\frac{R_0^3}{3!\,B^3}\frac{R_1^3}{3!\,B^3} + \cdots$$

В калькуляторе набора Галактика-Платон, фокс-умножение реализовано на универсальной функции.

$$x = v * \left(brn_{m,s_1} R_1 [*] brn_{m,s_2} R_2\right) = v * mat_{m,1,s_1,s_2}\left(\frac{R_1}{m}, \frac{R_2}{m}\right)$$

Чтобы решить уравнение $3x^{12} + 2x^7 + 4x^3 - 20 = 0$, можно заложить в числовую память этого калькулятора следующую программу

$$v = e^{\frac{Ln\left(\frac{20}{3}\right)}{m}}, \qquad m = 12$$

$$s_1 = 7, \qquad R_1 = \frac{-2}{3v^5}$$
$$s_2 = 3, \qquad R_2 = \frac{-4}{3v^9}$$
$$x = v * mat_{m,1,s_1,s_2}\left(\frac{R_1}{m}, \frac{R_2}{m}\right)$$

Затем ввести в индикатор калькулятора ‘x’, и нажать ‘=’

Если в меню strucMath-Ln=0, то калькулятор даст такой корень 1.1092321891982008957

Можно сделать проверку, вставить в индикатор калькулятора $3x^{12} + 2x^7 + 4x^3$ и нажать ‘=’

Фокс-умножение используется не только в полиномах. Это очень распространённая в природе операция. Например

$$y = x * e^{z_1 x^{s_1} + z_2 x^{s_2}}$$
$$x = y * mat_{0,1,s_1,s_2}(-z_1 y^{s_1}, -z_2 y^{s_2})$$

Никаких методов тыкания и других итераций, ненужно использовать для решения таких задач. С помощью фокс-умножения, все они решаются исключительно аналитически. Понять, чем отличается фокс-умножение, от обычного умножения несложно. Когда два члена разных рядов фокс-умножаются, они представляют следующее фокс-произведение

$$\frac{\prod_{a_1=1}^{h_1-1}(-ma_1 + t + h_1 s_1)\, x_1^{h_1}}{h_1!} [*] \frac{\prod_{a_2=1}^{h_2-1}(-ma_2 + t + h_2 s_2)\, x_2^{h_2}}{h_2!} = \prod_{a=1}^{h_1+h_2-1}(-ma + t + h_1 s_1 + h_2 s_2) \frac{x_1^{h_1} x_2^{h_2}}{h_1!\, h_2!}$$

Итого. Мы нашли все функции и операции, которые охватывает универсальная функция, когда её головной параметр t=1. Ранее мы рассматривали арктангенс, функцию Ламберта и логарифм, когда t=0. После небольшого отпуска, займёмся изучением всех возможностей универсальной функции, при t=0. Что в переводе на русский язык означает – продолжение следует.

http://glax-plato.ru/

https://www.cyberforum.ru/blogs/784248/

Gruzdov A.V.
Berezin S.V.
Berezin A.V.
Berezin P.V.
Ufa, Russia.

2023.08.01