ТАБЛИЦА НАТУРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Груздов Андрей Викторович

Строительный инженер «Свой дом»

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

E-mail: andrj169@gmail.com

Березин Сергей Викторович

Программист Галактики Платон

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

E-mail: bkcru@bk.ru

Березин Алексей Владимирович

Кадастровый инженер, индивидуальный предприниматель

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

E-mail: berezin0278@yandex.ru

Березин Павел Владимирович

Инженер связи АО «Уфанет»

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

E-mail: pavel.bash@mail.ru

TABLE OF NATURAL FUNCTIONS

Gruzdov Andrey Viktorovich

Construction engineer "your home"

RF, r. Bashkortostan, p. Iglino

E-mail: andrj169@gmail.com

Berezin Sergey Viktorovich

Programmer of Galaxy Plato

RF, r. Bashkortostan, p. Iglino

E-mail: bkcru@bk.ru

Berezin Alexey Vladimirovich

Cadastral engineer, individual entrepreneur

RF, r. Bashkortostan, p. Iglino

E-mail: berezin0278@yandex.ru

Berezin Pavel Vladimirovich

Communication engineer at Ufanet JSC

RF, r. Bashkortostan, p. Iglino

E-mail: pavel.bash@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Разработана такая таблица математических функций, которая позволяет узнавать некоторые свойства и степенной ряд функции по её расположению в таблице. Найдены новые операции над функциями.

ABSTRACT

A table of mathematical functions has been developed that allows you to recognize some properties and the power series of a function by its location in the table. New operations on functions have been found.

Ключевые слова: ультрарадикал; расширенная функция Ламберта; функция конечность; слиток функций; операция слияние функций; монолит функций; операция внедрение функций; универсальная функция; сборная Тейлора, Маклорена; закон расположения корней алгебраических уравнений радикальными кистями; таблица функций.

Key words: ultraradical; extended Lambert function; limb function; function ingot; function merging operation; monolith of functions; operation implementation of functions; universal function; Team Taylor, Maclaurin; the law of arrangement of roots of algebraic equations with radical brushes; function table.

Зная расположение функции в этой таблице, можно узнать её степенной ряд, некоторые тождества, радиус сходимости и многое другое. Всю эту информацию можно получить из простой координаты – номер столбца и номер строки. Если постоянно пользоваться этой информацией, то и без таблицы её запоминаешь. Но после продолжительного отпуска и, тем более, новичкам, эта таблица оказывает ощутимую услугу.

Таблица 1.

Таблица натуральных функций

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">$m = 0$</td><td colspan="6">$m \neq 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$s = 0$</td><td colspan="3">$s \neq 0$</td><td colspan="3">$s = 0$</td><td colspan="3">$s \neq 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>t
00</td><td colspan="3">$t + hs$
01</td><td colspan="3">$-ma + t$
10</td><td colspan="3">$-ma + t + hs$
11</td></tr>
<tr><td>$t = 0$</td><td>x</td><td></td><td>$-lam(-x)$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\ln(1 + x)$</td><td></td><td>1
2</td><td>$-\ln(1 - x)$
$\operatorname{arcsinh} x$</td><td>1
1</td></tr>
<tr><td>$t = 1$</td><td>$\exp x$<table><tr><td>$\cos(x/i)$</td><td>$\sin(x/i)\, i$</td></tr><tr><td>$\cosh x$</td><td>$\sinh x$</td></tr></table></td><td></td><td>$lmb_s\, x$</td><td>s</td><td>m</td><td>$\sqrt[m]{1 + mx}$</td><td></td><td>m</td><td>$brn_{m,s}(mx)$</td><td>s</td></tr>
</table>

Радиус сходимости степенного ряда зависит от столбца. В нулевом столбце 00, радиус сходимости бесконечен. В первом столбце 01 два вида функций Ламберта. Их степенной ряд сходится, когда $|sx| < 1/e$. У остальных, кроме последней ячейки, радиус сходимости равен 1. В более подробной таблице в ячейке с радикалом находятся и биноминальное разложение, и геометрический ряд. Далее будет показано, почему их можно не указывать в таблице. В последней ячейке находится функция Бринга и несколько радикальных композиций, которые в сокращённой таблице не показаны. Радиус сходимости всех, кто располагается в этой ячейке, такой же, как и у функции Бринга. Их область сходимости будет показана позднее, во время демонстрации закона расположения корней алгебраических уравнений на комплексной плоскости радикальными кистями. Функция Бринга – это абсолютный ультрарадикал. Первый человек, который открыл частный случай ультрарадикала – это Иоганн Ге́нрих Ла́мберт. Но его именем уже назвали функцию, который открыл Леона́рд Э́йлер. Поэтому абсолютный ультрарадикал мы назвали в честь Эрланда Самуэля Бринга, который, не зная об открытии Ламберта, нашёл более частный случай ультрарадикала.

Есть такие параметрические тождества, которые одинаковы для всех функций одной строки. Например, для функций нулевой строки, когда t=0, тождества пропорциональности

$$c \times mts_{m,0,s}(x) = mts_{\frac{m}{c},0,\frac{s}{c}}(cx)$$

Для функций первой строки, когда t=1, тождества степени

$$\left(mts_{m,1,s}(x)\right)^{c} = mts_{\frac{m}{c},1,\frac{s}{c}}(cx)$$

Функция mts – это сборная Тейлора и Маклорена. Степенной ряд сборной можно расписать так

$$\begin{aligned} mts_{m,t,s}(x) = t + x + \frac{(-m+t+2s)x^2}{2} + \frac{(-m+t+3s)(-2m+t+3s)x^3}{3!} \\ + \frac{(-m+t+4s)(-2m+t+4s)(-3m+t+4s)x^4}{4!} \\ + \frac{(-m+t+5s)(-2m+t+5s)(-3m+t+5s)(-4m+t+5s)x^5}{5!} \\ + \dots \end{aligned}$$

Чтобы из этого ряда получить степенной ряд какой-нибудь функции, нужно заменить все параметры согласно номерам строк и столбцов. Если нужен сокращённый вид ряда, каким его показывают в современных учебниках, то надо сократить числители и знаменатели там, где они имеют общие множители, соблюдая выбранную прогрессию.

Например, получим степенной ряд квадратного корня из номеров строки и столбца

$$\sqrt[m]{1+x} = mts_{m,1,0}(x/m)$$
$$= 1 + \frac{x}{m} + \frac{(1-m)\left(\frac{x}{m}\right)^2}{2} + \frac{(1-m)(1-2m)\left(\frac{x}{m}\right)^3}{3!}$$
$$+ \frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)\left(\frac{x}{m}\right)^4}{4!} + \dots$$

$$\sqrt[2]{1+x} = mts_{2,1,0}(x/2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\times 4} + \frac{3x^3}{2\times 4\times 6} - \frac{3\times 5x^4}{2\times 4\times 6\times 8} + \dots$$

Точно также получается биноминальное разложение

$$(1+x)^n = mts_{1/n,1,0}(nx)$$

и геометрический ряд

$$\frac{1}{(1+x)^n} = mts_{-1/n,1,0}(-nx)$$

Но такое сокращение нужно не всегда. В ряде случаев нужно знать именно полный вид степенного ряда или его членов. Например, чтобы сравнить, чем отличается прогрессия членов одного ряда от прогрессии членов другого ряда, нужно, как минимум, чтобы знаменатели одинаковых членов обоих рядов были одинаковые. Кроме того, существуют такие функции, которые являются параметрическим соединением нескольких натуральных функций. Чтобы получить значение таких соединений, используются операции над параметрами функций. Чтобы пользоваться алгоритмами этих операций, такие сокращённые степенные ряды не подойдут. Этим алгоритмам надо знать функциональную формулу членов ряда.

$$mts_{m.t.s}(x) = t + \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{x^h}{h!}\prod_{a=1}^{h-1}(-ma+t+hs)\right)$$

Точнее, этим алгоритмам нужно знать только базисную часть членов

$$\prod_{a=1}^{h-1}(-ma+t+hs)$$

Остальная часть членов одинаковая у всех натуральных функций.

При t=1 нумерация членов начинается от нуля. Количество базовых множителей у каждого члена на единицу меньше номера члена. Каждый базовый множитель имеет одни, два или три базовых компонента: –ma, t, hs. Возможности натуральных функций, как и их свойства, зависят именно от наличия этих компонентов.

Натуральные функции могут быть полными, которые используют все члены ряда, и частичными. Например, синусы – это два-первые – нечётные функции, они используют не все, а только каждый второй, начиная с первого члена.

$$\sin x=\frac{mts_{0,1,0}(ix,\%2,1)}{i}$$

Есть радикальные композиции, которые используют каждый третий член, начиная с нулевого – три-нулевые. Есть такие, которые используют каждый третий член, начиная с первого – три-первые, и т. д. Хоть это и частичные функции, они наследуют некоторые свойства полных натуральных функций данной ячейки. Например, радиус сходимости ряда.

Параметрические соединения натуральных функций

Натуральные функции способны взаимодействовать друг с другом так, что образуются новые функции, с новыми возможностями и новыми свойствами. Такие взаимодействия называются параметрическими соединениями.

Например,

$$xe^{x} = e^{e^{f}}$$

$x = LambertW_{-1}\left(e^{e^{f}}\right) = 1 + 2R + \frac{10R^2}{2!} + \frac{54R^3}{3!} + \frac{302R^4}{4!} + \frac{1578R^5}{5!} + \frac{5786R^6}{6!} - \frac{11498R^7}{7!} - \frac{440450R^8}{8!} - \frac{2267446R^9}{9!} + \ldots, R = \frac{f}{2^2}$

при, $f = 0.04$, R=0.01

$$x = 1 + .05 + .0009 + \ldots = 1.0509\ldots$$

Эта функция является параметрическим соединением двух функций экспоненты $x = e^{f}$ и композиции $x = e^{e^{f}-1}$. Но чтобы из этих двух функций получить $LambertW_{-1}\left(e^{e^{f}}\right)$, нужно использовать не простую операцию типа сложения или умножения, а специальную операцию над функциями.

В этом уравнении, для определения корня используется параметрическое соединение экспонент. Их радиус сходимости бесконечен, и данный корень имеет бесконечное множество ветвей. Так как $\mathrm{e}^{2\pi i k} = 1, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

Представим это уравнение иначе

$$xe^{x} = y$$

У этого уравнения есть другой корень, который даёт простая функция Ламберта

$$x = lam(y)$$

$$lam(x) =- mts_{(0,0,1)}(-x) = x - \frac{2x^2}{2} + \frac{3^2x^3}{3!} - \frac{4^3x^4}{4!} + \frac{5^4x^5}{5!} - \ldots$$

Если немного расширить задачу

$$xe^{ax^{b}} = y$$

то этот же корень можно получить с помощью расширенной функции Ламберта

$$x = y \times lmb_b\left(-ay^b\right)$$

Эта же функция даёт корень другого уравнения

$$x^{ax^b} = e^y$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{lmb}_{-\mathrm{b}}(\mathrm{y}/\mathrm{a})$$

Обе эти функции имеют не бесконечный радиус сходимости, отчасти поэтому эти функции называются лэмб и ультралэмб, соответственно. От слова limb - конечность.

Ультралэмб способен образовывать два вида параметрических соединений.

1. @ - слиток функций. В этом соединение действуют числительные связи.

2. $ - монолит функций. В этом соединении действуют знаменательные связи.

В многочлене второго рода

$$y = xe^{z_1 x^{s_1} + z_2 x^{s_2} + \cdots}$$

ультралэмбы соединяются в слиток функций

$$x = y\ lmb_{@s_1, s_2, \cdots}(-\ z_1 y^{s_1}, -\ z_2 y^{s_2}, \cdots)$$

Чтобы получить слиток используется операция слияние функций

$$x = y\ lmb_{s_1}(-\ z_1 y^{s_1}) @ lmb_{s_2}(-\ z_2 y^{s_2}) = y\ lmb_{@s_1, s_2}(-\ z_1 y^{s_1}, -\ z_2 y^{s_2})$$

Как видно, операция слияние производится раньше операции умножения, и одновременно над всеми функциями, между которыми стоит знак слияния @.

В многочлене третьего рода

$$x^{ax^b + cx^d + \cdots} = e^f$$

ультралэмбы соединяются в монолит функций

$$x = lmb_{\$-b,-d,\cdots}\left(\frac{af}{(a+c)^2}, \frac{cf}{(a+c)^2}, \cdots\right)$$

Чтобы получить монолит, используется операция внедрение функций

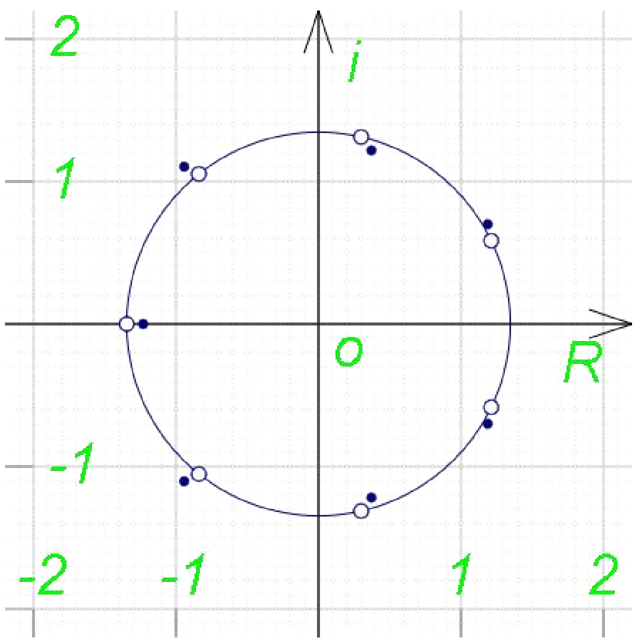
$$x = lmb_{-b}\left(\frac{af}{(a+c)^2}\right) \$\, lmb_{-d}\left(\frac{cf}{(a+c)^2}\right) = lmb_{\$-b,-d}\left(\frac{af}{(a+c)^2}, \frac{cf}{(a+c)^2}\right)$$

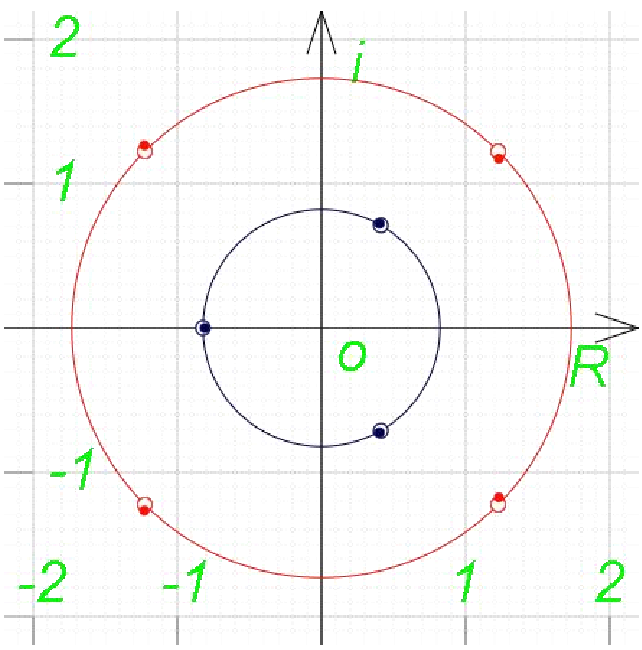
Слитки функций были открыты во время последних экспедиций на алгебраические уравнения, или как их сейчас называют авторы – многочлены первого рода.

Согласно закону радикальных кистей, любой корень многочлена первого рода располагается на одной из радикальных кистей. Таких кистей всегда меньше количества членов полинома. Иногда все корни располагаются на одной кисти.

Таблица 2.

Корни трёхчлена

<table>
<tr><td>$x^7 + 2x^3 + 8 = 0$</td><td>$x^7 + 9x^3 + 5 = 0$</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

$$x = v \times brn_{B,N}(R)$$

v – это один из корней выбранного радикала. Если выбрать радикал, на котором нет корней, степенной ряд ультрарадикала не сойдётся. Чтобы правильно выбрать радикальные кисти, нужно сравнить диаметрант D и степенант T

$$Fx^f + Gx^g + Hx^h = 0$$

$$|f| > |g| > |h|$$

$$D = \frac{|F|^{|g-h|} \times |H|^{|f-g|}}{|G|^{|f-h|}}$$

$$T = \frac{|g-h|^{|g-h|} \times |f-g|^{|f-g|}}{|f-h|^{|f-h|}}$$

После чего можно узнать, на каких кистях расположены корни, и получить их.

Таблица 3.

Формирование параметров ультрарадикала из коэффициентов и степеней членов алгебраического трёхчленного уравнения

$B = f - h$	$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{H}{F}\right)}{B}}$	$N = g - h$	$R = \frac{-G}{Fv^{B-N}}$	Blue	$D > T$
$B = f - g$	$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{G}{F}\right)}{B}}$	$N = h - g$	$R = \frac{-H}{Fv^{B-N}}$	Red	$D \leq T$
$B = g - h$	$v = e^{\frac{Ln\left(-\frac{H}{G}\right)}{B}}$	$N = f - h$	$R = \frac{-F}{Gv^{B-N}}$	Navy	

$$x = v \times brn_{B,N}(R)$$

Если членов 4 и более, корни определены уже не через один ультрарадикал, а через слиток ультрарадикалов.

$$x^{12} + 2x^7 + 5x^3 + 10 = 0$$

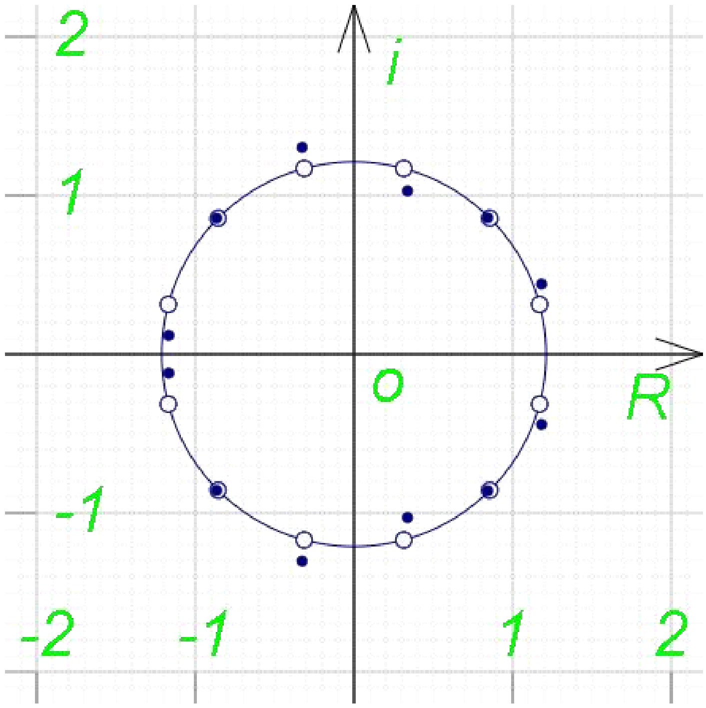


Рисунок 1. Корни четырёхчлена одной кисти

$$v^{12} + 10 = 0$$

$$v = e^{\frac{Ln(-10)}{12}}, B = 12 - 0, N_1 = 7 - 0, N_2 = 3 - 0, R_1 = \frac{-2}{v^{12-7}}, R_2 = \frac{-5}{v^{12-3}}$$

$$x = v\, brn_{B,@N_1,N_2}(R_1, R_2)$$

Операция слияние функций

Сборная функция содержит бесконечное количество членов.

$$mts_{m.t.s}(x) = t + \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{x^h}{h!}\prod_{a=1}^{h-1}(-ma + t + hs)\right)$$

Каждый член с номером h

$$\frac{x^h}{h!}\prod_{a=1}^{h-1}(-ma + t + hs)$$

состоит из двух множителей – рабочей дроби $\frac{x^h}{h!}$ и базисного произведения $\prod_{a=1}^{h-1}(-ma+t+hs)$.

При слиянии нескольких функций

$$\left(\sum_{h_1=0}^{\infty}\left(\frac{x^{h_1}}{h_1!}\prod_{a=1}^{h_1-1}(-ma+t+h_1s_1)\right)\right)@\left(\sum_{h_2=0}^{\infty}\left(\frac{x^{h_2}}{h_2!}\prod_{a=1}^{h_2-1}(-ma+t+h_2s_2)\right)\right)$$

происходит слияние каждого члена ряда одной функции, с каждым членом рядов каждой другой функции.

$$\left(\frac{x^{h_1}}{h_1!}\prod_{a=1}^{h_1-1}(-ma+t+h_1s_1)\right)@\left(\frac{x^{h_2}}{h_2!}\prod_{a=1}^{h_2-1}(-ma+t+h_2s_2)\right)$$

Слияние рабочих дробей равно их умножению

$$\frac{x^{h_1}}{h_1!}@\frac{x^{h_2}}{h_2!}=\frac{x^{h_1}}{h_1!}\times\frac{x^{h_2}}{h_2!}$$

Слияние базисных произведений выполняется так

$$\prod_{a=1}^{h_1-1}(-ma+t+h_1s_1)\,@\prod_{a=1}^{h_2-1}(-ma+t+h_2s_2)$$
$$=\prod_{a=1}^{h_1+h_2-1}(-ma+t+h_1s_1+h_2s_2)$$

Затем это слитное базисное произведение просто умножается на рабочие дроби этих членов.

$$\left(\frac{x^{h_1}}{h_1!}\prod_{a=1}^{h_1-1}(-ma+t+h_1s_1)\right)@\left(\frac{x^{h_2}}{h_2!}\prod_{a=1}^{h_2-1}(-ma+t+h_2s_2)\right)$$
$$=\prod_{a=1}^{h_1+h_2-1}(-ma+t+h_1s_1+h_2s_2)\times\frac{x^{h_1}}{h_1!}\times\frac{x^{h_2}}{h_2!}$$

Базисное произведение $\prod_{a=1}^{h_1-1}(-ma+t+h_1s_1)$ состоит из базовых множителей $(-m+t+h_1s)(-2m+t+h_1s)(-3m+t+h_1s)\ldots$

Базовый множитель сложен из базовых параметров (-m,t,s), умноженных на номер данного множителя, в данном члене (a) или на номер члена (h)

$$(-ma+t+h_1s_1)$$

количество базовых множителей в базисном произведении ограничено нижней и верхней границей $\mathrm{a}=[1;\mathrm{h}-1]=[1;\mathrm{h})$. Говоря на языке программирования, базисное произведение можно получить так

$$\mathrm{P}=1$$

$$\mathrm{for}(\mathrm{a}=1;\mathrm{a}<\mathrm{h};\mathrm{a}=\mathrm{a}+1)\{\mathrm{P}=\mathrm{P}(-\mathrm{ma}+\mathrm{t}+\mathrm{hs})\}$$

Содержимое цикла будет выполняться $\{\mathrm{P}=\mathrm{P}(-\mathrm{ma}+\mathrm{t}+\mathrm{hs});\mathrm{a}=\mathrm{a}+1\}$ до тех пор, пока соблюдается условие $\mathrm{a}<\mathrm{h}$. Поэтому у членов $\mathrm{h}=0$ и $\mathrm{h}=1$, всегда $\mathrm{P}=1$. Так как условие цикла $\mathrm{a}<\mathrm{h}$ не соблюдается у них изначально. В операции слияние членов $\mathrm{h_1s_1@h_2s_2@h_3s_3}$ происходит следующее слияние цикла базовых множителей

$$\mathrm{P}=1$$

$$\mathrm{for}(\mathrm{a}=1;\mathrm{a}<\mathrm{h}_1+\mathrm{h}_2+\mathrm{h}_3;\mathrm{a}=\mathrm{a}+1)\{\mathrm{P}=\mathrm{P}(-\mathrm{ma}+\mathrm{t}+\mathrm{h}_1\mathrm{s}_1+\mathrm{h}_2\mathrm{s}_2+\mathrm{h}_3\mathrm{s}_3)\}$$

Поэтому при слиянии даже первых членов первого и второго ряда ($\mathrm{h}_1=1,\mathrm{h}_2=1$), уже появляются базовые множители, так как их сумма уже больше 1.

Операция внедрение функций

Монолиты функций были открыты в конце января 2024 г. Алгоритм операции внедрение пока ещё не готов, приносим свои извинения за это временное неудобство. Между открытием абсолютного ультрарадикала и открытием операции слияние функций прошло 5 лет. Конечно, сегодня у нас уже намного больше опыта. И тем не менее, следует подчеркнуть, что знаменательные связи намного сложнее исследовать, чем числительные. Поэтому точную дату завершения экспедиций на многочлены третьего рода мы пока назвать не готовы.

Нулесчётчиковое выражение десятичных дробей

Возможно, кому-то будет интересно посмотреть на такой способ отображения длинных чисел, который имеет большую наглядность и компактность. Здесь рядом с цифрами могут встречаться цифры нижнего индекса. Эти малюсенькие числа являются показателями количества нулей, которые стоят на их месте.

$._{5}7755432=.000007755432$

$127_{4}=1270000$

$1_{7}25=1000000025$

$1._{7}25=1.000000025$

$1_{7.}25=10000000.25$

$1_{3}._{4}25=1000.000025$

Заключение

Пока можно сказать, что существует 3 вида функций. Натуральные, их соединения или простые операции над ними, например $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, и искусственные, то есть такие, которые невозможно получить никаким соединением натуральных функций и другими операциями над ними.

В исследованных на сегодняшний день параметрических соединений натуральных функций обнаружены два вида связи параметров – числительная и знаменательные.

Литература

1. E. M. Wright. Solution of the equation $ze^z = a$. Proc. Roy. Soc. Edinburg Ser. A, 65:193-203, 1959.
2. Klein, F. (1888). Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree. Translated by Morrice, George Gavin. Trübner & Co. ISBN 0-486-49528-0.
3. LXIX Международная научно-практическая конференция «Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований» (Россия, г. Новосибирск, 22 ноября 2023 г.) https://sibac.info/conf/technology/60/307058
4. Universum 2024 1(118) DOI - 10.32743/UniTech.2024.118.1.16645 https://7universum.com/ru/tech/archive/item/16645

2024.03